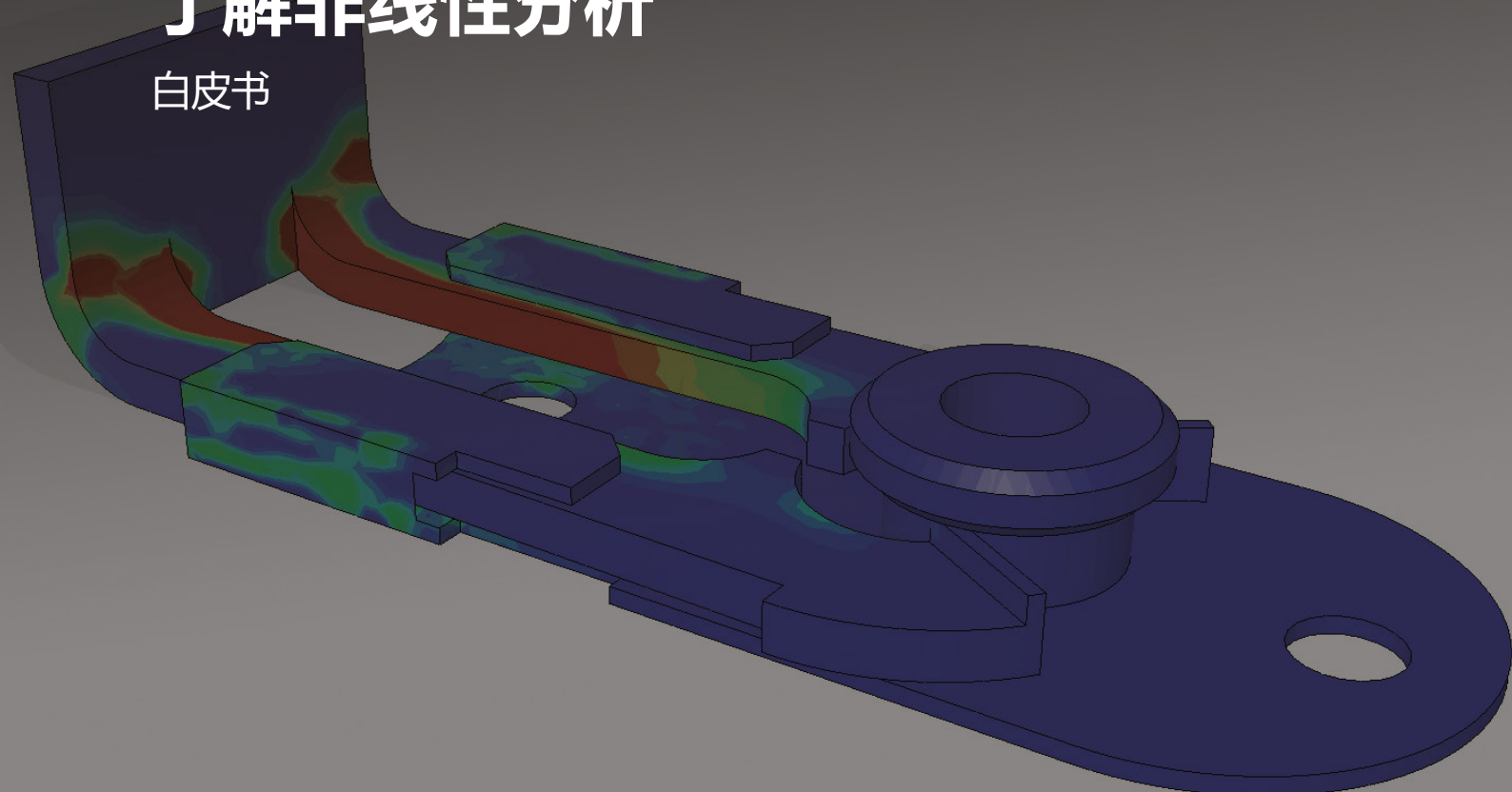


# 了解非线性分析

白皮书



## 概述

在本白皮书中, 您将了解线性和非线性分析之间的差异, 并认识到在某些时候使用一种类型的分析将比使用另一种类型的分析获得更佳的结果。我们将发现, 忽略非线性效应可能会导致严重的设计错误。在查看来自日常设计实践中的示例之后, 您将了解到非线性分析可以如何帮助您避免过度设计并构建更好的产品。

# 目录

## P.1

前言

## P.3

非线性几何形状

## P.4

非线性材料

## P.8

弹性稳定性损失 (扭曲)

## P.9

接触应力和  
非线性支撑

## P.10

非线性动态分析

## P.11

日常实践中的  
非线性分析

## P.14

结语

## 前言

过去十年以来,有限元分析 (FEA) 已不再仅仅被视为分析师的工具,而是进入了设计工程的实务领域。CAD 软件现在附带内置 FEA 功能,设计工程师使用 FEA 作为日常设计工具以支持产品设计流程。

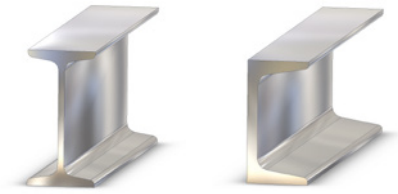
但是,直到最近,设计工程师进行的大多数 FEA 应用都仅限于线性分析。此类线性分析为设计工程师遇到的大多数问题提供了接近真实情况且可接受的特性。但是,偶尔也会出现更具挑战性的问题,需要使用非线性方法。

工程师过去不太愿意使用非线性分析,原因在于其复杂的问题界定和较长的解算时间。这种情况正在发生变化,因为非线性 FEA 软件已与 CAD 连接并变得更易于使用。此外,改进的解算算法和强大的台式计算机也缩短了解算时间。十年前,工程师已认识到 FEA 是一种有价值的设计工具。现在,他们开始认识到非线性 FEA 为设计流程带来的好处和更深刻的理解。

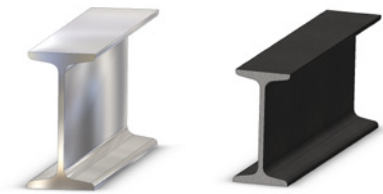
## 线性和非线性分析之间的差异

术语“刚度”定义了线性和非线性分析之间的基本差异。刚度是零件或装配体的一个特性,表现了其对所施加负载的响应。影响刚度的一些因素包括:

1.形状:工字横梁与槽形横梁的刚度不同。



2.材料:铁梁的刚度小于相同尺寸的钢梁。



3.零件支撑件:带有简单支撑件的横梁的刚度较小,并且相比带有内置支撑件的相同横梁会出现更大弯曲,如图 1 所示。

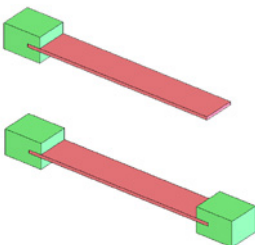


图 1: 悬臂梁 (顶部) 的刚度低于在两端 (底部) 支撑的相同横梁。

术语“刚度”定义了线性和非线性分析之间的基本差异。刚度是零件或装配体的一个特性,表现了其对所施加负载的响应。影响刚度的三个主要因素:形状、材料和零件支撑件。

当某个结构在负载下发生变形时,其刚度也会由于以上列出的一个或多个因素而发生变化。如果变形极大,其形状可能也会改变。如果材料达到其破坏极限,材料属性将会改变。

另一方面,如果刚度的变化足够小,则完全可以假设形状和材料属性在变形过程中未发生任何变化。这种假设就是线性分析的基本原理。

这意味着在整个变形过程中,所分析的模型在应用负载之前将保留未变形形状时所具有的任何刚度。无论模型变形的程度如何,无论负载是在一步施加还是逐渐施加,也无无论在响应该负载时产生的应力有多高,该模型都会保留其初始刚度。

这种假设极大地简化了问题的界定和解算。回顾一下基本 FEA 公式:

$$[F] = [K] * [d]$$

其中:

**[F] 是节点负载的已知向量**

**[K] 是已知刚度矩阵**

**[d] 是节点位移的未知向量**

此矩阵公式描述了 FEA 模型的行为。它包含大量的线性代数公式,从几千个到几百万个不等,具体取决于模型大小。刚度矩阵 [K] 取决于几何形状、材料属性和约束。在线性分析假设模型刚度永不改变的情况下,这些公式只需组合和解算一次,在模型变形时无需更新任何内容。因此,线性分析将问题界定到完成沿直线进行。即使对于极大的模型,它也能在数秒或数分钟内生成结果。

这一切从进入非线性分析世界后就发生了变化,因为非线性分析要求工程师放弃恒定刚度的假设。相反,刚度将在变形过程中发生变化,并且刚度矩阵 [K] 必须在迭代解算过程中随着非线性解算器的进度而更改。这些迭代会增加获得准确结果所需的时间。

如果刚度的变化足够小,则完全可以假设形状和材料属性在变形过程中未发生任何变化。这种假设就是线性分析的基本原理。

## 了解不同类型的非线性行为

尽管所有类型的非线性分析都具有共同的刚度变化过程，但非线性行为的原点可能有所不同，因此根据非线性的主要原点对非线性分析进行分类是合乎逻辑的。由于在许多问题中无法指出非线性行为的单一原因，因此某些分析可能需要考虑多种非线性类型。

### 非线性几何形状

如前所述，当零件的刚度在其操作条件下发生变化时，就需要进行非线性分析。如果刚度的变化仅仅来自于形状的变化，则非线性行为将被定义为几何非线性。

当零件出现肉眼可见的大变形时，就会发生这种由形状引起的刚度变化。一个普遍接受的经验法则表明，如果变形大于零件最大尺寸的  $1/20$ ，则有必要执行非线性几何形状分析。另一个需要识别的重要因素是：在发生较大变形时，负载方向可能会随着模型变形而改变。大多数 FEA 程序都提供了两种选择来应对此方向变化：跟随和非跟随负载。

如图 2 所示，跟随负载相对于变形模型保持其方向。非跟随负载则会保持其初始方向。

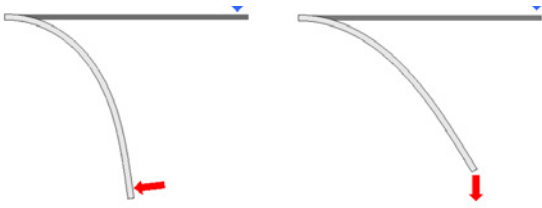


图 2：在变形过程中，跟随（或称非守恒）负载会改变其方向，并与变形横梁保持垂直（左侧）。非跟随（或称守恒）负载将保持其原始方向（右侧）。

承受极高压力的压力容器会发生剧烈的形状变化，这是后一种情况的另一个典型示例。压力负载始终会垂直作用于压力容器的壁体。虽然此情形的线性分析假设容器形状没有改变，但压力容器的实际分析需要使用非守恒（或称跟随）负载来分析几何非线性。

一个普遍接受的经验法则表明，如果变形大于零件最大尺寸的  $1/20$ ，则有必要执行非线性几何形状分析。另一个需要识别的重要因素是：在发生较大变形时，负载方向可能会随着模型变形而改变。

当变形较小时, 也会由于形状而造成刚度变化。最初平坦但在压力下发生偏转的薄膜就是一个典型示例 (参见图 3)。

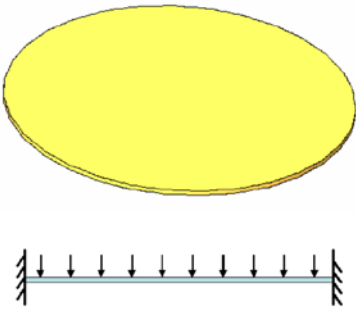


图 3: 承受压力负载的平坦薄膜需要进行非线性几何形状分析, 即使变形幅度可能非常小也是如此。

最初, 薄膜只能凭借其折弯刚度来抵抗压力负载。当压力负载导致一定程度的弯曲后, 变形薄膜的刚度将在原始折弯刚度的基础上增大 (图 4)。变形会改变薄膜的刚度, 以使变形薄膜的刚度大大高于平坦薄膜。

某些 FEA 程序使用了混淆性术语, 将几何非线性的所有分析称为“大变形分析”。这忽略了对较小变形执行非线性分析的必要性。

当变形较小时, 也会由于形状而造成刚度变化。最初平坦但在压力下发生偏转的薄膜就是一个典型示例。最初, 薄膜只能凭借其折弯刚度来抵抗压力负载。当压力负载导致一定程度的弯曲后, 变形薄膜的刚度将在原始折弯刚度的基础上增大。

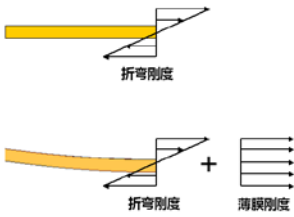


图 4: 平坦薄膜只能凭借折弯刚度对负载作出响应。由于变形, 它还会获得薄膜刚度。因此, 它比线性分析所预测的刚度要高得多。

### 非线性材料

如果刚度的变化仅仅来自于工作条件下的材料特性变化, 则问题在于材料的非线性。线性材料模型假设应力与应变成正比 (如以下图 5 所示)。这意味着它假定施加的负载越高, 应力和变形就越高, 与负载变化成正比。它还假定不会导致永久变形, 并且一旦卸去负载, 模型将始终恢复其原始形状。

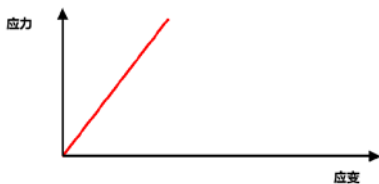


图 5: 线性材料模型假设应力与应变成正比。

尽管这种简化是可以接受的,但如果负载高到足以导致某些永久变形(就像大多数塑料一样),或者应变极高(有时会大于 50%,就像橡胶和弹性体一样),则必须使用非线性材料模型。

由于不同类型的材料在其工作条件下的表现存在巨大差异,因此 FEA 程序开发了专门的技术和材料模型来模拟这些行为。下表简要介绍了哪些材料模型最适合哪种问题。

材料分类	模型	评论
弹性塑性	Von Mises 或 Tresca	这些模型非常适合应变-应力曲线在达到极限应力之前显示为“平坦”的材料。大多数工程金属和某些塑料都具有此材料模型的明显特征。
	Drucker-Prager	此模型适用于土壤和颗粒材料。
超弹性	Mooney-Rivlin 和 Ogden	非常适合橡胶等不可压缩弹性体。
	Blatz-Ko	此模型适用于可压缩聚氨酯泡沫橡胶。
粘弹性	多个(其他模型可选)	此模型适用于硬橡胶或玻璃。
蠕变	多个(其他模型可选)	蠕变是在恒定应力状态下产生的时间相关性应变。大多数工程材料,尤其是高温下的金属、高分子塑料、混凝土和火箭发动机中的固体推进剂都会发生蠕变。
超弹性 (形状记忆合金)	镍钛诺	镍钛诺等形状记忆合金(SMA)会表现出超弹性效应。这种材料会在负载-卸载过程中发生较大变形,但不会出现永久变形。

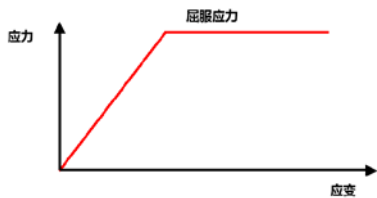


图 6: 理想弹性塑性材料模型的应力-应变曲线。使用此材料模型时,最大应力幅度不能超过塑性应力(屈服应力)的极限。

在处理理想弹性塑性材料模型 (也就是在变形后失去恢复原始形状的所有能力的材料) 的分析时, 应力将一直保持高于一定的应变值。它描述了通过八个螺栓将隔板的铸铁材料固定到位的情况。

线性分析表明, 与 206 MPa (30,000 psi) 的材料屈服值相比, 最大 von Mises 应力为 614 MPa (89,600 psi)。该线性分析的结果如图 7 所示。

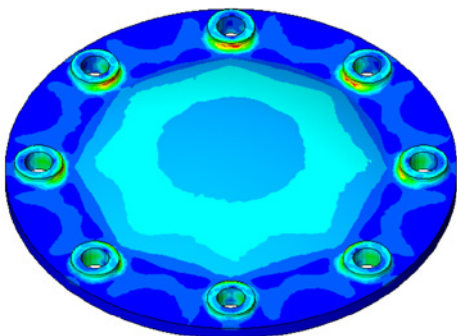


图 7: 隔板的线性应力解算显示出极高的局部应力集中。

如果应力超过屈服值, 隔板是否会脱落? 要找出答案, 需要使用弹性塑性材料模型来检查有多少材料将变为塑性。图 8 显示了最大应力等于屈服应力时的非线性解算。塑性区域仍在局部, 表示隔板不会脱落。当然, 需要仔细的工程判断来决定此设计是否可接受。

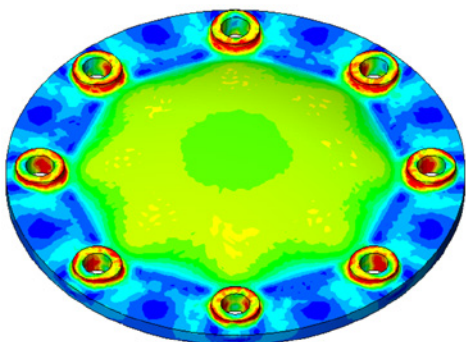
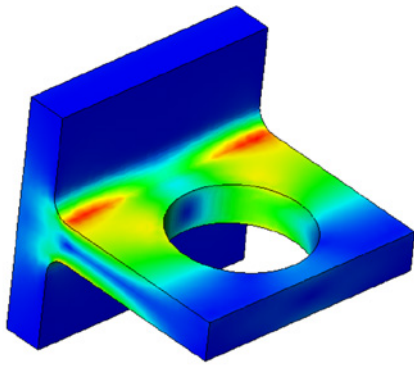


图 8: 使用理想弹性塑性材料模型获得的非线性应力解算。红色区域表示材料变为塑性。塑性区域的范围处于局部。

在处理理想弹性塑性材料模型 (也就是在变形后失去恢复原始形状的所有能力的材料) 的分析时, 应力将一直保持高于一定的应变值。

图 9 显示了一个铝制支架的线性应力解算。最大应力读数为 44 MPa (6,400 psi)，并且忽略材料在 28 MPa (4,100 psi) 时屈服的事实。



如果应力超过屈服值，隔板是否会脱落？要找出答案，需要使用弹性塑性材料模型来检查有多少材料将变为塑性。塑性区域仍在局部，表示隔板不会脱落。

图 9：一个空心支架的线性应力解算显示，应力高于材料屈服应力的限制。

非线性材料分析可以考虑这些结果，即当最大应力保持在 28 MPa (4,100 psi) 时材料发生屈服 (图 10)。非线性应力结果表明，该支架已非常接近倒塌。塑性区域几乎占据悬臂的整个横截面，负载量值的轻微增加将导致横截面变为完全塑性并形成塑性铰链，从而导致支架倒塌。

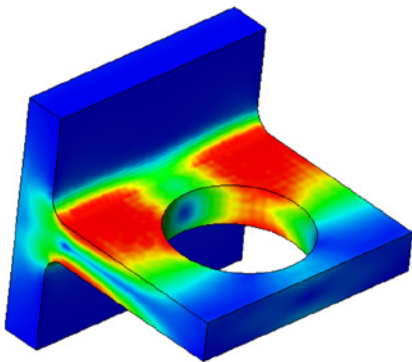


图 10：非线性应力解算显示最大应力不高于屈服应力。塑性区域的范围表示支架非常接近于形成塑性铰链。它已达到负载承受能力的极限。

要对先“弄直”再“折弯”普通钢质回形针的简单操作进行建模，需要同时考虑非线性材料和非线性几何形状。图 11 显示了使用理想弹性塑性材料模型的回形针变形形状。图 12 显示了将回形针折弯回到原始形状后的残余应力。

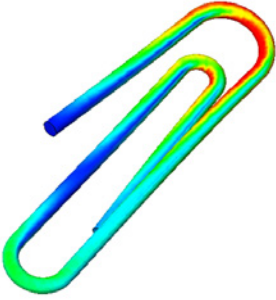


图 11: 回形针折弯的分析需要执行非线性材料和非线性几何形状分析。处于“弄直”位置的回形针显示了塑性应力

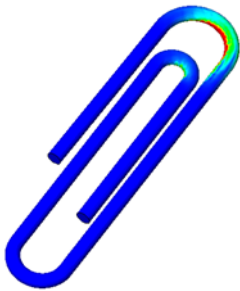


图 12: 折弯回到原始形状的回形针显示了残余应力。

### 弹性稳定性损失 (扭曲)

零件中的刚度也会因施加的负载而变化。有时，负载会根据其施加方式而增加刚度（张力负载）或降低刚度（压缩负载）。例如，一根绷紧的绳索可以承受杂技演员的体重。但是，松软的绳索则会使他掉落。在压缩负载情况下，如果刚度的变化足以导致结构的刚度降为零，则会出现扭曲，并且结构会发生快速变形。然后，它会在后屈曲状态下脱落或获得新的刚度。

线性扭曲分析可用于计算结构在何处负载下将会扭曲（欧拉负载）。但是，线性扭曲分析的结果并不守恒。此外，FEA 模型中的理想化可能导致 FEA 模型的预测扭曲负载大大高于实际零件。因此，应谨慎使用线性扭曲分析的结果。

扭曲并不一定等于突变失效，并且结构在扭曲发生后仍可支撑负载。非线性分析将解释后扭曲行为。

图 13 和图 14 显示了突弹跳变效应。即使发生扭曲, 零件也仍然会保持其负载承受能力。

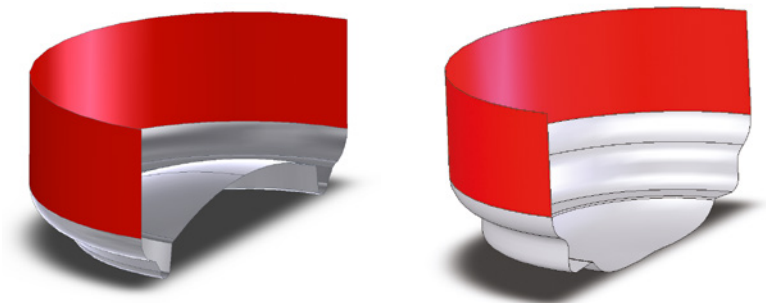


图 13: 突弹跳变效应

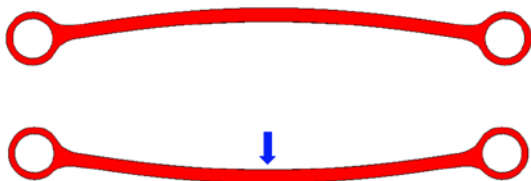


图 14: 突弹跳变效应的分析需要执行非线性分析。

### 接触应力和非线性支撑

如果支撑条件 (包括接触) 在应用工作负载期间发生变化, 则需要执行非线性分析。

两个接触曲面之间产生接触应力。因此, 接触面积和接触区域的刚度在解算之前均为未知。图 15 显示了一个典型接触问题的应力解算。即使接触应力面积相对于整体模型尺寸来说极小, 接触区域不断变化的刚度也需要进行非线性分析。

如果支撑条件 (包括接触) 在应用工作负载期间发生变化, 则需要执行非线性分析。

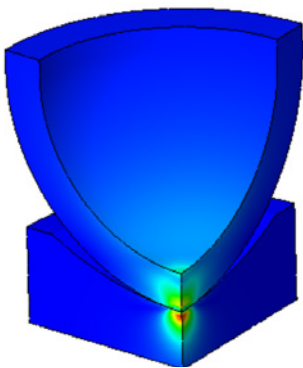


图 15: 对两个球体之间的应力形成建模 (仅显示两个接触零件中的一个) 的接触应力分析属于使用非线性支撑的分析类别。

图 16 显示了一个非线性支撑的示例。有效横梁长度以及由此产生的刚度取决于横梁的变形量。当横梁接触到支撑件时, 其刚度会由于其活动长度下降而增加。

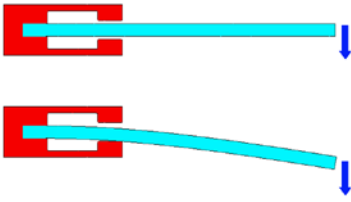


图 16: 此支撑件 (激活时) 将改变横梁的有效长度。因此, 横梁刚度将会发生变化, 并且需要对问题进行非线性分析。

### 非线性动态分析

动态分析将会考虑惯性效应、减振和时间相关性负载。跌落测试、发动机支架振动、安全气囊展开或碰撞模拟都进行需要动态分析。但是, 动态分析是线性还是非线性呢? 限定规则与静态分析中的规则完全相同。

如果模型刚度在应用的负载下没有显著变化, 则线性动态分析就足够了。振动中的发动机支架或音叉都会在平衡点附近发生轻微变形, 因此可以通过线性动态分析进行分析。

诸如碰撞模拟、安全气囊展开分析或金属冲压过程建模等问题都需要进行非线性动态分析, 因为会出现大变形 (非线性几何形状) 和大应变 (非线性材料)。

### 非线性分析如何帮助我们构建更好的产品?

自然本来就是非线性的。这意味着线性分析只能近似于零件和装配体的实际非线性行为。大多数情况下, 这种近似值是可以接受的, 并且线性分析可以针对产品特性提供宝贵见解。但是, 在许多情况下, 线性假设与实际情况差别太大, 提供的信息十分粗劣甚至会产生误导。

使用线性分析的结果来确定零件在其工作负载下是否会失效, 从而导致设计过度。例如, 仅仅使用线性分析进行分析的支架设计要求设计人员必须严格遵守应力不得超过屈服量的要求。但是, 非线性分析可能表明某些屈服是可以接受的。在此情况下, 就可以节省使用的材料量或选择成本较低的材料, 而不会影响结构完整性。再比如, 工程师在使用线性分析测试时可能会担心出现过大的平面偏差, 虽然过度设计可以补偿该偏差, 但不知道线性分析会夸大变形, 并且像最初设计的那样没有问题。

但是, 在许多情况下, 线性假设与实际情况差别太大, 提供的信息十分粗劣甚至会产生误导。使用线性分析的结果来确定零件在其工作负载下是否会失效, 从而导致设计过度。

## 日常设计实践中的非线性分析

一旦工程师拥有足够的经验来识别非线性问题，就会明白该技术的应用并非局限于特殊情况。在每个行业和日常设计实践中，有很多设计需要或可能受益于非线性分析。

在以下产品示例中，需要非线性分析才能作出正确的设计决策。其中许多问题都涉及到多种类型的非线性行为。

### 惰轮 (图 17)

这种压印钢滑轮在承受皮带负载时，可能会在形成过大应力之前就出现扭曲。尽管线性扭曲分析可能足以确定扭曲负载，但还是需要执行非线性分析以研究其后扭曲行为。

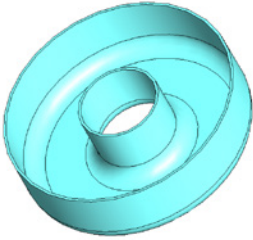


图 17: 惰轮

### 膜片弹簧 (图 18)

非线性弹簧特性要求进行非线性几何形状分析，以考虑薄膜效应。

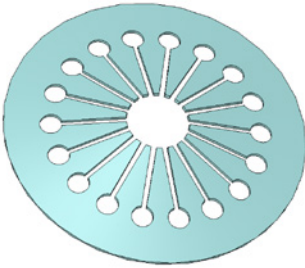


图 18: 膜片弹簧

### 翻滚保护结构 (图 19)

如果发生翻滚，结构变形将超过其屈服量，并吸收翻滚能量。在此过程中，将会出现较大变形。要了解翻滚的影响，需要将非线性材料和非线性几何形状分析相结合。



图 19: 翻滚保护结构

### 软质产钳 (图 20)

软质产科钳的设计是在产钳辅助生产过程中, 在婴儿头部周围“铸模”如果施加的牵引力和/或压力太高, 产钳将按设计从婴儿头部脱落, 以防止受伤。此类产钳的分析必须结合非线性材料和非线性几何形状, 以考虑大变形和非线性弹性材料。



图 20: 软质产钳

### 风扇护罩 (图 21)

由于在变形过程中形成的薄膜应力, 此零件需要进行非线性几何形状分析。可能还需要进行非线性材料分析。

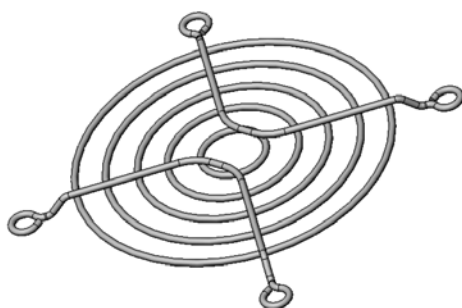


图 21: 风扇护罩

### 卡环 (图 22)

由于出现较大变形, 需要进行非线性几何形状分析。此环还可以用作非线性材料分析的备选。



图 22: 卡环

### 航空行李箱 (图 23)

由于蓝色 Lexan® 面板中的薄膜效应, 此航空行李箱需要进行非线性几何形状分析。此外, 边框还需要进行扭曲或后扭曲分析。

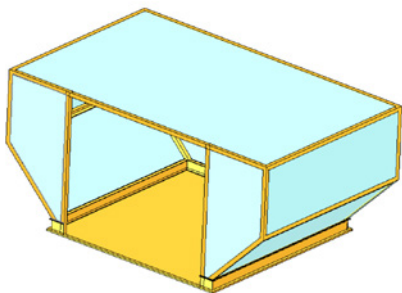


图 23: 航空行李箱

### 办公椅 (图 24)

在本例中, 边框的较大变形可能需要进行非线性几何形状分析。座椅和靠背需要进行非线性几何形状和非线性材料分析。



图 24: 办公椅

### 内六角扳手 (图 25)

该扳手和凹头螺钉之间的接触需要进行接触应力分析。

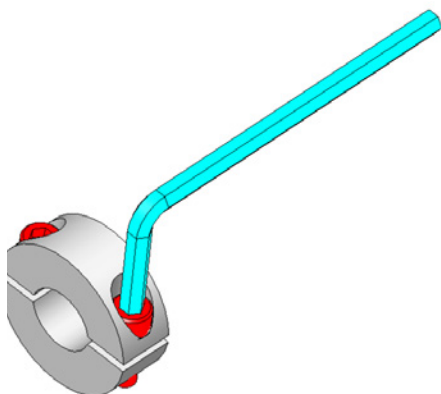


图 25: 内六角扳手

## 结语

所遇分析问题的性质应该是判断在工程师的 FEA 软件中是否需要增加非线性分析功能的依据。如果设计分析问题涉及到较大变形、薄膜效应、非线性材料、接触应力、扭曲、非线性支撑或其他非线性，则应在设计工程师专用的内部 FEA 软件中增加非线性分析功能。

过去数十年来，工程师一直将 FEA 用作设计工具。现在，FEA 软件、计算机硬件和云计算已经足够成熟，可以轻松地将非线性分析添加到其工具箱中。

## 来自 SOLIDWORKS 的仿真解决方案

SOLIDWORKS 现在为最先进的非线性现象提供了可扩展性和各种非线性功能，涵盖从单一来源到多种非线性效应。SOLIDWORKS 在 SOLIDWORKS Simulation Premium 和基于云的 SIMULIAworks 中提供了非线性功能。

**SOLIDWORKS Simulation Premium** 使您可以高效地评估非线性和动态响应设计、动态负载以及复合材料，并且包含两个高级非线性算例：非线性静态和非线性动态。

[在此处详细了解 SOLIDWORKS Simulation Suite](#)

**SIMULIAworks** 扩展了 SOLIDWORKS Simulation 的功能，特别适合解算包含多种同时发生的非线性效应和多步顺序加载的分析。SIMULIAworks 是一种紧密集成、基于云的解决方案，可对零件和装配体执行结构静态、频率、扭曲、模态动态响应以及结构热分析。SIMULIAworks 由 SIMULIA Abaqus 提供支持，后者是一款成熟的世界一流有限元分析解算器，使您能够自信地处理复杂程度较高的结构问题。

[在此处详细了解 SIMULIAworks](#)

我们的 **3DEXPERIENCE®** 平台为我们服务于 11 个行业领域的品牌应用程序提供了技术驱动，同时提供了一系列丰富的行业解决方案经验。

**3DEXPERIENCE®** 公司达索系统为企业和用户提供一个可持续构想创新产品的虚拟空间。本公司全球领先的解决方案转变了产品的设计、生产和支持方式。达索系统协作解决方案促进社会创新，实现了更多通过虚拟世界改善现实世界的可能性。本集团为 140 多个国家/地区、各行各业、不同规模的 250000 多家客户带来价值。更多信息，请访问 [www.3ds.com/zh](http://www.3ds.com/zh)。

